Početní část 2 - 7.6.2021

3. Vyšetřete lokální i globální extrémy funkce

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2+1}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

(7 bodů).

4. Spočtěte parciální derivace $\partial_x f$, $\partial_y f$ a totální diferenciál funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{y^2}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0. & x = 0 \end{cases}$$

ve všech bodech $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ (10 bodů).

Řešení

3. Zřejmě $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, takže všechny extrémy jsou stacionárními body. Spočteme
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^3 - x^2 y + y}{(x^2+y^2+1)^2}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^3 - y^2 x + x}{(x^2+y^2+1)^2}. \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$
Stacionární body splňují tedy $A \wedge B$, kde

   (a) $x = 0$ nebo $x^2 - y^2 + 1 = 0$,

   (b) $y = 0$ nebo $y^2 - x^2 + 1 = 0$,

   což nastává pro právě jeden bod $(x,y) = (0,0)$. V tomto bodě není ale lokální extrém, neboť
$$\nabla^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
je indefinitní matice. Alternativně si lze všimnout, že
$$f(h,-h) < 0 < f(h,h)$$
pro každé $h \in \mathbb{R}$, a proto $f(0,0) = 0$ není extrém.

   Funkce f proto nemá žadné lokální ani globální extrémy.

4. (a) Nechť nejprve $x \neq 0,\ y \in \mathbb{R}$. Pak lze mechanickým derivováním spočítat
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sin\left(\frac{y^2}{x}\right) - \frac{y^2}{x}\cos\left(\frac{y^2}{x}\right),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy\cos\left(\frac{y^2}{x}\right).$$
Tyto parciální derivace jsou spojité na otevřené množině $\{x \neq 0\}$, takže zde existuje totální diferenciál
$$\mathrm{d}f = \left(\sin\left(\frac{y^2}{x}\right) - \frac{y^2}{x}\cos\left(\frac{y^2}{x}\right)\right)\mathrm{d}x + 2xy\cos\left(\frac{y^2}{x}\right)\mathrm{d}y\,.$$

(b) Zabývejme se dále případem $x = 0$, $y \neq 0$. Z definice parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

Limita

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \sin\left(\frac{y^2}{h}\right)$$

však neexistuje (viz vybraná posloupnost $h_k = \frac{2y^2}{(2k+1)\pi}$). Tedy ani totální diferenciál neexistuje.

(c) Zbývá vyšetřit počátek souřadnic, kde můžeme použít následující odhad:

$$|f(x,y)| \leq y^2 \leq |y|\sqrt{x^2+y^2} = o(\sqrt{x^2+y^2}),$$

takže z definice $\mathrm{d}f\,(0,0) = 0$. Speciálně

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}\,(0,0) = 0.$$